

Kinematyka robota typu delta – model matematyczny i implementacja

Krzysztof Młynarczyk 

Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny

e-mail: krzysztof.mlynarczykk@gmail.com

Małgorzata Zdrodowska 

Politechnika Białostocka, Wydział Mechaniczny

e-mail: m.zdrodowska@pb.edu.pl

DOI: 10.65731/az-2026-0080

Streszczenie

W artykule przedstawiono podstawowe zagadnienia kinematyki robotów przemysłowych na przykładzie manipulatora o równoległej strukturze kinematycznej – robota typu delta, zbudowanego w ramach pracy inżynierskiej. Omówiono dwa podstawowe zagadnienia: zadanie proste kinematyki, polegające na wyznaczeniu pozycji efektora na podstawie znanych kątów obrotu napędów, oraz zadanie odwrotne kinematyki, w którym dla zadanej pozycji efektora wyznaczane są wymagane kąty obrotu napędów. Dla obu zadań przedstawiono analityczny model matematyczny oparty na zależnościach geometrycznych oraz przykłady obliczeniowe. Opracowany model zaimplementowano w rzeczywistym stanowisku robotycznym wyposażonym w system wizyjny i chwytak szczękowy.

Słowa kluczowe

robot delta, kinematyka robotów, kinematyka prosta, kinematyka odwrotna, robot równoległy

Wstęp

Każdego dnia na liniach produkcyjnych pracują roboty przemysłowe wykonujące zadania wymagające dużej szybkości i precyzji. W przemyśle spożywczym roboty przechwytyują produkty przemieszczające się na przenośnikach i umieszczają je

w odpowiednich opakowaniach, natomiast w przemyśle elektronicznym wykorzystuje się je m.in. do precyzyjnego montażu podzespołów. Za każdym ruchem robota stoją odpowiednio opracowane modele matematyczne oraz algorytmy sterowania.

Jednym z podstawowych zagadnień związanych ze sterowaniem robotem jest określenie jego położenia oraz sposobu osiągnięcia zadanego punktu w przestrzeni. Kluczową rolę odgrywa w tym przypadku kinematyka robotów, zajmująca się opisem geometrycznych i czasowych właściwości ruchu bez uwzględniania sił, które ten ruch wywołują.

Kinematyka stanowi połączenie pomiędzy warstwą programową a rzeczywistym ruchem manipulatora. Polecenie przesunięcia efektora do punktu o zadanych współrzędnych (X , Y , Z) musi zostać przekształcone na odpowiednie wartości kątów obrotu poszczególnych napędów. Z kolei informacje o położeniu osi mogą być wykorzystane do wyznaczenia rzeczywistej pozycji efektora. Umożliwia to zarówno sterowanie ruchem robota, jak i kontrolę jego aktualnego położenia.

Szczególnie interesującą konstrukcją z punktu widzenia kinematyki jest robot typu delta. W przeciwieństwie do klasycznych robotów szeregowych, których człony są połączone kolejno, manipulator delta wykorzystuje równoległą strukturę kinematyczną. Dzięki niewielkiej masie elementów ruchomych konstrukcja ta umożliwia osiąganie dużych prędkości i przyspieszeń. Roboty delta znajdują zastosowanie przede wszystkim w zadaniach typu pick-and-place, w których istotne znaczenie mają szybkość oraz powtarzalność wykonywanych ruchów.

Celem artykułu jest przedstawienie podstawowych zagadnień kinematyki robotów na przykładzie manipulatora typu delta zbudowanego w ramach pracy inżynierskiej. Przedstawiono model matematyczny robota oraz sposób rozwiązania zadań kinematyki prostej i odwrotnej. Zaprezentowano również przykłady obliczeniowe oraz praktyczną implementację opracowanego modelu w rzeczywistym stanowisku robotycznym.

1. Kinematyka robotów

Kinematyka jest nauką zajmującą się badaniem ruchu, bez wnikania w przyczyny ruchu ten wywołujące. Badane są położenie ciała, jego prędkość, przyspieszenie oraz pochodne wyższych rzędów względem czasu lub innej zmiennej [Ayazbay i in., 2024].

Każdy robot składa się ze sztywnych członów połączonych ze sobą za pomocą przegubów. Przeguby umożliwiają wzajemny ruch sąsiadujących członów i to właśnie w przegubach przekazywany jest moment z napędów. Układ wszystkich czło-

nów i przegubów od podstawy do efektor końcowego tworzy łańcuch kinematyczny. Jeśli łańcuch ma wyraźny początek, np. unieruchomioną podstawę, i koniec, np. chwytak, mówi się o otwartym łańcuchu kinematycznym. Jest to popularna budowa charakterystyczna dla robotów przemysłowych. Jeśli natomiast efektor jest jednocześnie połączony z kilkoma niezależnymi gałęziami kinematycznymi prowadzącymi do tej samej nieruchomej podstawy, to łańcuch tworzy zamkniętą pętlę i wtedy mówi się o strukturze równoległej. Robot delta należy do tej drugiej kategorii – każdy z jego trzech łańcuchów kinematycznych niezależnie łączy napęd na podstawie z platformą ruchomą i dopiero ich wspólne działanie wyznacza pozycję efektora [Briot, 2015].

Całkowita liczba stopni swobody manipulatora wyznacza, ile niezależnych wartości konfiguracyjnych – kątów obrotu lub przesunięć – jednoznacznie opisuje chwilowy stan geometryczny układu. Robot delta posiada trzy stopnie swobody: każdy z trzech napędów obraca jedno ramię, a kombinacja tych trzech obrotów wyznacza pozycję platformy ruchomej w trójwymiarowej przestrzeni [Clavel, 1990].

Do opisu matematycznego manipulatora należy zdefiniować dwie przestrzenie:

- Przestrzeń konfiguracyjna – jest to przestrzeń wszystkich możliwych zestawów wartości zmiennych przegubowych. W przypadku robota delta z trzema ramionami jest to zestaw trzech kątów: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, po jednym dla każdego napędu. Każdy punkt tej przestrzeni odpowiada określonej geometrycznej konfiguracji całego mechanizmu [Clavel, 1990].
- Przestrzeń robocza – to zbiór wszystkich pozycji (X, Y, Z) , które może osiągnąć efektor końcowy w przestrzeni trójwymiarowej. W tej przestrzeni programista wykonuje swoje zadania. Tutaj definiuje się punkty docelowe ruchu, trajektorie i sprawdzane są kolizje z przeszkodami. Jest ona wyznaczona przez geometrię układu i ma skończone rozmiary. Nie każdy punkt w przestrzeni trójwymiarowej jest dla niego osiągalny [Clavel, 1990].

Dla danej konfiguracji przegubów wyznaczana jest pozycja efektora, natomiast dla jednej pozycji efektora może przypadać wiele konfiguracji przegubów – albo żadna, jeśli punkt znajduje się poza przestrzenią roboczą [Briot, 2015].

Zadanie proste kinematyki polega na wyznaczeniu współrzędnych końcówki efektora przy znanych wartościach współrzędnych członów lub kątów obrotu. W przypadku robota delta obliczenia wymagają uwzględnienia zależności geometrycznych wynikających z jego równoległej struktury kinematycznej [Briot, 2015].

Zadanie odwrotne kinematyki polega na wyznaczeniu kątów obrotu bądź współrzędnych członów przy znanych współrzędnych efektora końcowego [Briot, 2015].

Za każdym razem, gdy efektor robota ma się przemieścić do nowo zadanego punktu, program podaje współrzędne celu, a sterownik oblicza, jakie kąty muszą

przyjąć napędy. Rozwiązań może być wiele – ta sama pozycja efektora bywa osiągalna przez kilka różnych konfiguracji mechanizmu. Wybór właściwego rozwiązania wymaga dodatkowych kryteriów, na przykład wyboru konfiguracji, w której ramiona wyginają się w oczekiwanym kierunku, zgodnie z przyjętymi założeniami projektowymi [Craig, 1995].

W manipulatorach szeregowych (otwartych) każdy człon jest niesiony przez poprzedni. Napęd w pierwszym przegubie musi poruszać wszystkimi dalszymi ogniwami i napędami, a inercja układu rośnie z odległością końcówki od podstawy. Przekłada się to na ograniczenia dynamiczne: szybkie przyspieszenie ciężkich ogniw zewnętrznych wymaga dużych momentów napędowych i może wywoływać drgania [Briot, 2015; Clavel, 1990].

W manipulatorach równoległych efektor jest jednocześnie podparty przez trzy niezależne łańcuchy kinematyczne. Wszystkie napędy zamontowane są bezpośrednio na nieruchomej podstawie i nie uczestniczą w ruchu jako masa ruchoma – poruszają jedynie lekkie ramiona i platformę efektora. Skutkuje to zmniejszeniem inercji ruchomych części i pozwala na osiąganie przyspieszeń i prędkości zdecydowanie wyższych niż w robotach szeregowych. Z drugiej strony roboty te cechują się złożoną kinematyką, ponieważ równania opisujące ruch każdej gałęzi muszą być spełnione jednocześnie, co prowadzi do konieczności rozwiązywania układów równań [Briot, 2015; Clavel, 1990].

2. Robot typu delta

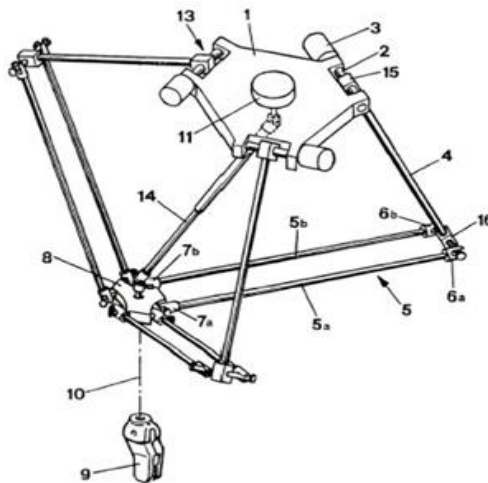
Robot typu delta jest manipulatorem o równoległej strukturze kinematycznej i zamkniętym łańcuchu kinematycznym. Jego budowę można podzielić na następujące elementy [International Federation of Robotics, 2025]:

- Nieruchoma podstawa – jest zazwyczaj przymocowana do sufitu lub stalowej ramy stanowiska. Znajdują się na niej układy napędowe, rozmieszczone symetrycznie.
- Trzy ramiona dwuczłonowe – są połączone przegubem kulistym w miejscu łączenia ramion. Punkt ten nazywany jest łokciem. Każde ramię składa się z:
 - ramienia górnego (napędowego) o długości r_f , mocowanego bezpośrednio lub przez przekładnię do wału silnika. Obraca się ono wokół poziomej osi w płaszczyźnie wyznaczonej przez oś pionową robota i kierunek tego ramienia. Jego ruch opisuje łuk okręgu w przestrzeni 2D;

- ramienia dolnego (ciągną) o długości r_e , składającego się z jednego lub wielu prętów tworzących mechanizm paralelogramowy. Ważną właściwością jest to, że niezależnie od kąta obrotu ramienia górnego dolna platforma zachowuje stałą orientację, pozostając pozioma.
- Platforma ruchoma – wielokąt, do którego dołączone są końce wszystkich trzech ramion dolnych. Na platformie montuje się efektor końcowy i ewentualnie narzędzia pomocnicze.

Mechanizm paralelogramowy zapewnia ruch translacyjny w trzech kierunkach w przestrzeni (X, Y, Z), natomiast platforma nie obraca się wokół żadnej osi. Oznacza to, że robot delta ma trzy stopnie swobody, wszystkie translacyjne [Lynch i Park, 2017].

Schemat robota przedstawiony przez R. Clavela (rys. 1) obejmuje nieruchomą podstawę (1) i platformę ruchomą (8), połączoną za pomocą dwuczłonowych ramion. Składają się one z trzech sterowanych ramion (4), które zintegrowane z wałkami (2) są napędzane przez układy silników (13). Części ruchome wykonują ruch względem elementów stałych (3). Druga część ramienia składa się z dwóch prętów (5a), (5b), zamocowanych do drugiego końca ramienia napędzanego za pomocą przegubów kulistych (16). Element ruchomy (10) za pomocą napędu (11) steruje ruchem efektora końcowego (9). Teleskopowe ramię (14) przenosi moment z napędu na efektor [Clavel, 1990].



Rys. 1. Schemat robota delta wg R. Clavela [Clavel, 1990]

Źródło: opracowanie własne.

Manipulator składa się z lekkich ogniw, natomiast cięższe elementy, takie jak silniki, znajdują się na nieruchomej podstawie. Taka architektura pozwala robotowi na uzyskiwanie przyspieszeń liniowych o wartościach kilkudziesięciu m/s^2 , co zapewnia ponad 200 cykli pracy na minutę [Craig, 1995; Clavel, 1990].

Równoległa struktura zapewnia także sztywność całego układu. Obciążenie efektora jest rozkładane na trzy ramiona, co zmniejsza ugięcia i poprawia powtarzalność pozycjonowania [Craig, 1995; Clavel, 1990].

Manipulatory delta są głównie stosowane w branży spożywczej, farmaceutycznej i elektronicznej oraz przy sortowaniu elementów, co potwierdzają raporty branżowe [Merlet, 2006], a także opracowania naukowe [Młynarczyk, 2026].

3. Model matematyczny robota delta

W celu matematycznego opisu ruchu wprowadzono kartezjański układ współrzędnych z początkiem O w środku nieruchomej platformy bazowej robota. Oś Z skierowana jest w dół, w stronę przestrzeni roboczej [Briot, 2015; Craig, 1995; Morecki i Knapczyk, 1993].

Geometrię układu opisują następujące parametry:

- ramię górne (r_f),
- ramię dolne (r_e),
- bok trójkąta bazy (f),
- bok trójkąta platformy (e),
- offset chwytaka.

Dla uproszczenia obliczeń wprowadza się parametr asymetrii platform (1):

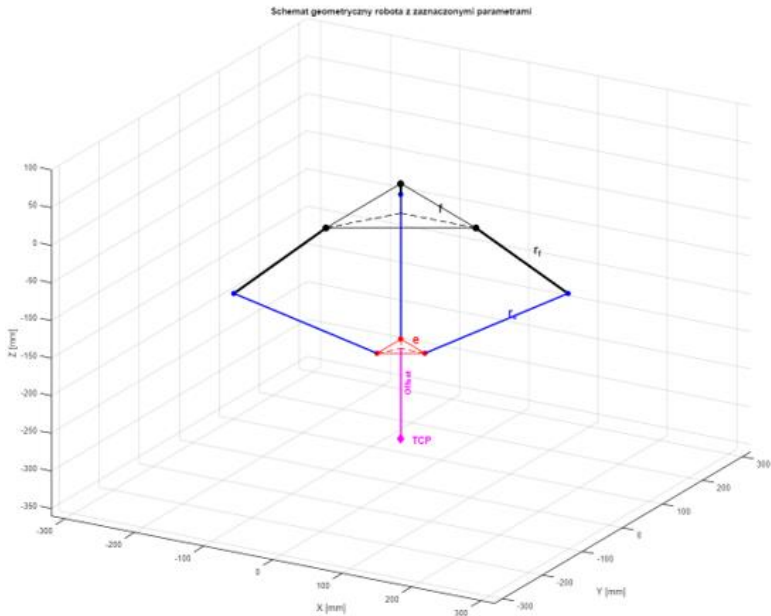
$$a = \frac{(f - e)\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$

Jest on równy różnicy promieni okręgów wpisanych w oba trójkąty platformowe. Parametr a pozwala traktować punkt TCP (ang. *Tool Center Point*), będący końcówką efektoru, jako punkt materialny, bez konieczności śledzenia platformy ruchomej [Craig, 1995; Morecki i Knapczyk, 1993; Briot, 2015].

Kąt obrotu i -tego silnika oznaczono przez θ_i ($i = 1, 2, 3$). Przez B_i oznaczono położenie łokci, czyli punktów łączących ramiona górne z dolnymi.

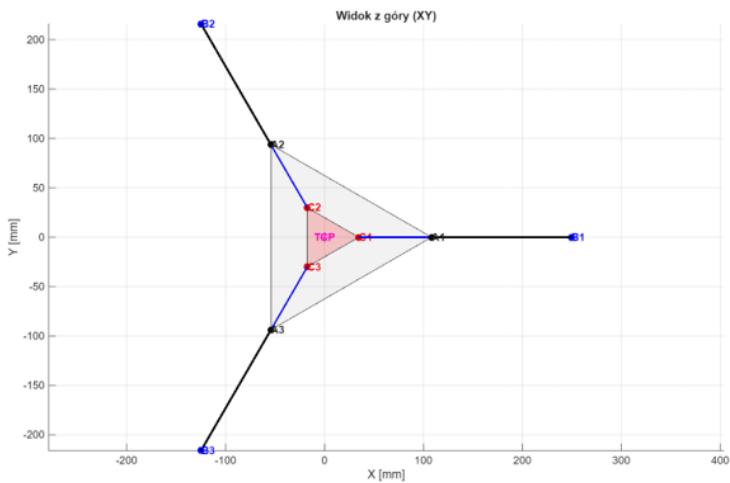
Model zaimplementowano w środowisku MATLAB/Simulink w celu wykonania wizualizacji (rys. 2 i 3).

Obliczenia wykonano na podstawie książek *Podstawy robotyki* autorstwa A. Moreckiego i J. Knapczyka [Morecki i Knapczyk, 1993] oraz *Dynamics of Parallel Robots* S. Briota [Briot, 2015].



Rys. 1. Schemat geometryczny robota [Morecki i Knapczyk, 1993]

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Oznaczenie punktów geometrycznych robota wykorzystywanych do obliczeń [Craig, 1995]

Źródło: opracowanie własne.

3.1. Zadanie proste kinematyki

W zadaniu prostym znane są kąty obrotu napędów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, a szukana jest pozycja TCP (X, Y, Z). W pierwszym kroku wyznaczane są współrzędne wszystkich łokci B_1, B_2, B_3 w globalnym układzie współrzędnych. Zostały one zapisane w macierz (2):

$$B' = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ B'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1, y_1, z_1 \\ x_2, y_2, z_2 \\ x_3, y_3, z_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(f-e)\sqrt{3}}{6} & -r_f \sin(\theta_1) \\ \cos(30^\circ) & -r_f \cos(\theta_1) & \sin(30^\circ) \\ \left[\frac{(f-e)\sqrt{3}}{6} + r_f \cos(\theta_2) \right] & \left[\frac{(f-e)\sqrt{3}}{6} + r_f \cos(\theta_2) \right] & -r_f \sin(\theta_2) \\ \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) & \\ \left[\frac{(f-e)\sqrt{3}}{6} + r_f \cos(\theta_3) \right] & \left[\frac{(f-e)\sqrt{3}}{6} + r_f \cos(\theta_3) \right] & -r_f \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Każdy z wierszy wyznacza geometrię każdego z ramion z uwzględnieniem jego kąтового rozmieszczenia wokół osi pionowej.

Kolejnym krokiem jest utworzenie równania sfer. Z warunku geometrycznego wynika, że punkt TCP musi leżeć jednocześnie na trzech sferach tworzonych w każdym z łokci B_i . Okręgi ta mają promienie równe długości dolnego ramienia r_e :

$$x^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_e^2 \quad (3)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_e^2 \quad (4)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_e^2 \quad (5)$$

Następnie zredukowano te równania do układu liniowego poprzez odjęcie równania pierwszego od drugiego i trzeciego, upraszczając je i eliminując wyrazu kwadratowe $x^2 + y^2 + z^2$ tworząc w ten sposób układ równań (6):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y_1y - 2z_1z = r_e^2 - y_1^2 - z_1^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_2x - 2y_2y - 2z_2z = r_e^2 - y_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x_2x - 2y_2y - 2z_2z = r_e^2 - y_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \end{cases} \quad (6)$$

W celu zmniejszenia ilości zmiennych wyznaczono zmienne „x” oraz „y” w zależności liniowej od „z”. Równania przedstawiają się następująco (7), (8):

$$x = a_1z + b_1 \quad (7)$$

$$y = a_2 z + b_2 \quad (8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{d} [(z_2 - z_1)(y_3 - y_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)] \\ b_1 &= -\frac{1}{2d} [(w_2 - w_1)(y_3 - y_1) - (w_3 - w_1)(y_2 - y_1)] \\ a_2 &= -\frac{1}{d} [x_3(z_2 - z_1) - x_2(z_3 - z_1)] \quad (9) \\ b_2 &= \frac{1}{2d} [x_3(w_2 - w_1) - x_2(w_3 - w_1)] \\ d &= x_3(y_2 - y_1) - x_2(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

przy czym $w_i = r_e^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2$.

Kolejnym krokiem jest równania względem z . Po podstawieniu równań (7) i (8) do pierwszego równania sfery (3) oraz redukując problem do równania kwadratowego ze zmienną z otrzymano:

$$z^2(a_1^2 + a_2^2 + 1) + 2z(a_1 + a_2(b_2 - y_1) - z_1) + (b_1^2 + (b_2 - y_1)^2) \quad (10)$$

Z tego równania wyznaczono wyróżnik równania, a następnie obliczono jego pierwiastki. Z obu równań wybrano rozwiązanie ujemne, gdyż oś Z układu kartezjańskiego jest skierowana w dół. Wynika to bezpośrednio z geometrii robota i jego położenia z przestrzenią roboczą. Pozostałe zmienne obliczono na podstawie wyznaczonej zmiennej sprzed podstawienie ich do pozostałych równań.

Ostatecznie współrzędne TCP prezentują się następująco:

$$x_{TCP} = a_1 \cdot z_{TCP} + b_1 \quad (11)$$

$$y_{TCP} = a_2 \cdot z_{TCP} + b_2 \quad (12)$$

$$z_{TCP} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a &= a_1^2 + a_2^2 + 1 \\ b &= 2[a_1 b_1 + a_2(b_2 - y_1) - z_1] \quad (14) \\ c &= b_1^2 + (b_2 - y_1)^2 + z_1^2 - r_e^2 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

3.2. Zadanie odwrotne kinematyki

Szukane są współrzędne punktu C_0 (15):

$$C_0 = C(x_0, y_0, z_0) \quad (15)$$

Punktem wyjścia jest podstawowy warunek geometryczny, który musi być spełniony dla każdego z trzech łańcuchów kinematycznych to odległość od łokcia B_i do punktu TCP musi równać się długości cięgna r_e^2 . Warunek ten opisuje równanie sfery (16):

$$(x_{Ci} - x_{Bi})^2 + (y_{Ci} - y_{Bi})^2 + (z_{Bi} - z_{Ci})^2 = r_e^2 \quad (16)$$

Współrzędne łokcia B_i wyznaczany z geometrii ramienia górnego. Ramię 1 obraca się w płaszczyźnie XZ z osią obrotu wzdłuż osi Y.

$$x_{Bi} = a + r_f \cos(\theta_i) \quad (17)$$

$$y_{Bi} = 0 \quad (18)$$

$$z_{Bi} = r_f \sin(\theta_i) \quad (19)$$

gdzie $a = w_b - w_e$ jest parametrem asymetrii:

$$a = \frac{(f - e)\sqrt{3}}{6}$$

Podstawiając równania (17-19) do (16) otrzymamy:

$$E_i \cos(\theta_i) + F_i \sin(\theta_i) + G_i = 0 \quad (20)$$

gdzie:

$$E_i = -2 \cdot r_f \cdot (x_{Ci} - a)$$

$$F_i = -2 \cdot r_f \cdot z_{Ci} \quad (21)$$

$$G_i = (x_{Ci} - a)^2 + y_{Ci}^2 + z_{Ci}^2 + r_f^2 - r_e^2$$

Analogiczne równania obowiązują dla pozostałych ramion, należy jedynie obrotić współrzędne TCP do odpowiednich lokalnych układów ramion.

Kolejnym krokiem jest rozwiązanie równania trygonometrycznego przez skorzystanie z podstawienia połowy kąta otrzymując:

$$t = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right), \cos(\theta_i) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin(\theta_i) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (22)$$

Następnie zależności (22) podstawiono do równania (20) i przemnożeniu obustronnie przez $1 + t^2$ otrzymano równanie kwadratowe:

$$(G_i - E_i)t^2 + 2F_it + (G_i + E_i) = 0 \quad (23)$$

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste. W tym przypadku należało ponownie wybrać jedną z konfiguracji robota – tę w której łokcie wystają na zewnątrz, które odpowiada rozwiązaniu z minusem.

$$\theta_i = 2 \cdot \arctan \left(\frac{-F_i - \sqrt{E_i^2 + F_i^2 - G_i^2}}{G_i - E_i} \right) \quad (24)$$

Jest to wzór wyznaczający kąt obrotu każdego silnika na podstawie współrzędnych pozycji TCP. Trzykrotne zastosowanie tej formuły (24), za każdym razem z obroconym wektorem TCP daje wszystkie trzy kąty $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

Rozwiązanie istnieje (mianownik i wyrażenie pod pierwiastkiem są rzeczywiste i niezerowe) wtedy i tylko wtedy, gdy zadany punkt TCP leży w przestrzeni roboczej manipulatora. Warunek $E_i^2 + F_i^2 - G_i^2 \geq 0$ jest matematyczną postacią warunku osiągalności, jeśli jest naruszony, żaden zestaw kątów silnikowych nie pozwoli dotrzeć do zadanego punktu.

4. Przykłady obliczeniowe

Wyprowadzone wzory zostaną zastosowane dla konkretnych danych przedstawionych w tab. 1.

Tab. 1. Zestawienie wielkości używanych do obliczenia kinematyki robota

Wielkość	Wartość [mm]
Ramię górne (r_t)	147
Ramię dolne (r_e)	250
Bok trójkąta bazy (f)	340
Bok trójkąta platformy (e)	120
Offset chwytaka	0

Parametr asymetrii platform obliczony ze wzoru (1) wynosi (25):

$$a = \frac{(340 - 120) \cdot \sqrt{3}}{6} = 63,51 \text{ [mm]} \quad (25)$$

4.1. Zadanie proste kinematyki

Celem jest wyznaczenie położenia końcówki efektora dla odczytów z enkoderów silnika o wartościach $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = 45^\circ$

W pierwszym kroku odczytywane są wartości sinusa i cosinusa dla podanego kąta:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071 \quad (26)$$

Następnie wyznaczana jest Macierz B' współrzędnych łokci w globalnym układzie współrzędnych. Dla każdego z trzech ramion można wyliczyć współrzędną na podstawie wzoru (2):

$$z_i = -r_f \cdot \sin \varphi_i = 147 \cdot 0,7071 = -103,49 \text{ [mm]} \quad (27)$$

Ramię poziome bez uwzględnienia rotacji można wyznaczyć z: $a + r_f \cdot \cos \varphi_i = 63,51 + 103,49 = 167 \text{ [mm]}$. Po rzutowaniu każdego z ramion na osie X i Y zgodnie ze wzorem (2) otrzymano trzy punkty B'_1, B'_2, B'_3 rozmieszczone symetrycznie na płaszczyźnie na wysokości $z = -103,4 \text{ [mm]}$.

Ze względu na symetrię trójkową ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$) wynika, że TCP musi leżeć na osi symetrii $x = 0, y = 0$. W takim przypadku zadanie redukuje się do wyznaczenia wysokości z .

Zapisano równania sfery (3-5) dla ramienia 1:

$$0 + 0 + (z - z_1)^2 + d_{xy}^2 = r_e^2 \quad (28)$$

Gdzie $d_{xy}^2 = 167 \text{ mm}$ i jest poziomą odległością rzutu łokcia od osi symetrii, a $z_1 = -103,49 \text{ mm}$. Zatem:

$$(z + 103,49)^2 + 167^2 = 250^2 \quad (29)$$

$$(z + 103,49)^2 = 62\,500 - 27\,889$$

$$z + 103,49 = \sqrt{34\,611}$$

$$z + 103,49 = \pm 186,04 \text{ [mm]}$$

Brane pod uwagę jest rozwiązanie z ujemnym z , ze względu na konfigurację przestrzeni roboczej ($z < 0$)

$$z = -103,49 - 186,04 = -289,53 \text{ [mm]} \quad (30)$$

Pełna pozycja TCP: (0, 0, -289.53) mm, czyli punkt leżący 289,5 mm pod punktem środkowym podstawy robota.

4.2. Zadanie odwrotne kinematyki

Celem jest wyznaczenie kątów obrotu silników $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, dla osiągnięcia pozycji otrzymanej w zadaniu prostym kinematyki: TCP: (0, 0, -289.53) mm

Ze względu na fakt, że punkt leży na osi symetrii, a budowa robot jest symetryczna – wystarczy obliczyć kąty dla jednego ramienia, gdyż pozostałe będą identyczne.

W pierwszym kroku obliczane są współczynniki (21):

$$E_1 = 2 \cdot 147 \cdot (0 - 63,51) = 18\,671,94$$

$$F_1 = 2 \cdot 147 \cdot (-289,53) = -85\,121,82 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= (0 - 63,51)^2 + 0^2 + 289,53^2 + 147^2 - 250^2 \\ &= 4\,033,52 + 83\,827,62 + 21\,609 - 62\,500 = 46\,969,52 \end{aligned}$$

Następnie obliczany jest wyróżnik $\Delta = E_1^2 + F_1^2 - G_1^2$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 18\,671,94^2 + (-85\,121,82)^2 - 46\,969,52^2 \quad (32) \\ &= 348\,641\,343.3636 + 7\,245\,724\,240.1124 - 2\,206\,135\,809.0304 \\ &= 5\,388\,229\,774.4456 \end{aligned}$$

$$\sqrt{\Delta} = 73\,404,56$$

Następnym krokiem jest wyznaczenie zmiennej pomocniczej ze wzoru (23):

$$t = \frac{-F_1 - \sqrt{\Delta}}{G_1 - E_1} = \frac{85\,121,82 - 73\,404,56}{46\,969,52 - 18\,671,94} = 2\,829\,758 = 0,414 \quad (33)$$

Ostatecznie wyznaczany jest kąt napędu ze wzoru (24):

$$\theta_1 = 2 \cdot \arctan(0,414) = 2 \cdot 22,5^\circ = 45^\circ \quad (34)$$

Dzięki symetrii układu wszystkie napędy powinny się obrócić o obliczony kąt (34)

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = 45^\circ$$

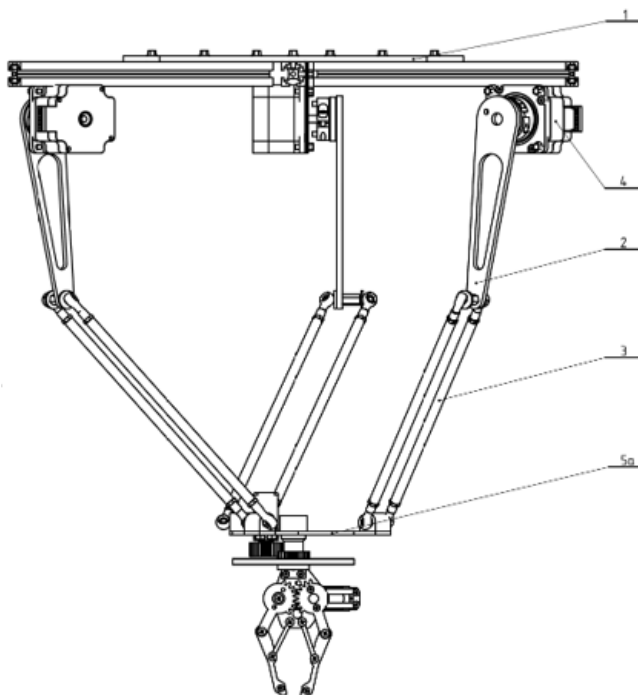
Wyniki zadania prostego oraz odwrotnego kinematyki są spójne. Jeśli silniki ustawione na 45° efektor znajduje się na $\varphi_3 = -289,53\,mm$ poniżej bazy. Wzajemna weryfikacja obu zadań stanowi podstawową metodę diagnostyki systemu sterowania. W przypadku występowania rozbieżności należałoby się doszukiwać luzów mechanicznych, błędów kalibracji bądź uszkodzeń w systemie.

5. Implementacja modelu [Morecki i Knapczyk, 1993]

Opisane w poprzednich rozdziałach modele matematyczne zostały zaimplementowane w działającym robocie i zweryfikowane eksperymentalnie. Stanowisko robotyczne składa się z manipulatora, systemu wizyjnego oraz przenośnika taśmowego.

Manipulator delta jest wykonany z aluminium, trzy ramiona górne są napędzane silnikami krokowymi zamontowanymi do nieruchomej podstawy. Zastosowano chwytak szczękowy do przenoszenia lekkich elementów.

System wizyjny składa się z dedykowanej kamery zamontowanej nad przenośnikiem, skierowanej prostopadle w dół na taśmę. Obraz kamery trafia w czasie rzeczywistym do algorytmu rozpoznawania kształtów i kolorów, który identyfikuje rodzaj detalu znajdującego się na taśmie. Algorytm jest realizowany przez Raspberry Pi 5.



Rys. 3. Schemat kinematyczny zaimplementowanego robota [Craig, 1995]

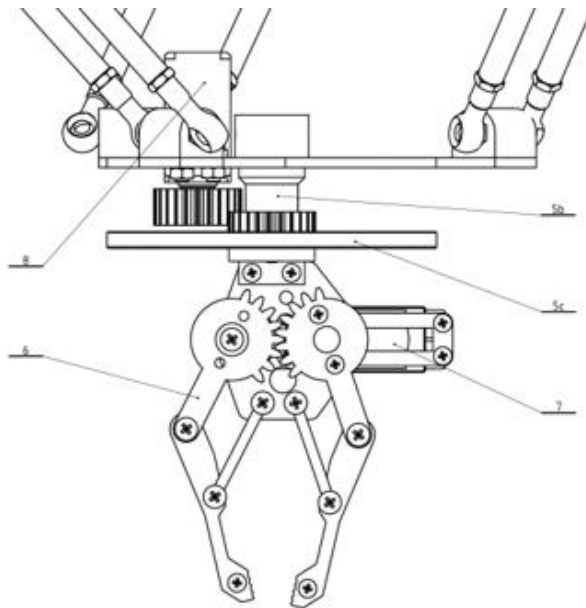
Źródło: opracowanie własne.

Przenośnik taśmowy służy do transportowania elementów z punktu A do B z określoną prędkością.

Na rys. 4 zaprezentowano część kinematyczną urządzenia. W jej skład wchodzi: podstawa (1), trzy ramiona górne (2) oraz sześć ramion dolnych (3). Napęd jest realizowany przez silniki krokowe (4), które wprawiają w ruch poszczególne ramiona, tworząc zamkniętą pętlę kinematyczną z platformą roboczą (5a).

Efektor końcowy (rys. 5) stanowi chwytak szczękowy (6), zamocowany od spodu platformy roboczej. Wyposażono go w dwa niezależne napędy: serwomechanizm szczęk (7), osadzony bezpośrednio w korpusie chwytaka, oraz serwomechanizm obrotu (8), zintegrowany z platformą i umożliwiający obrót chwytaka wokół osi Z.

Mechanizm obrotu zrealizowano przez podział platformy roboczej na trzy człony: górną platformę (5a), cylindryczną tuleję pośrednią (5b) i dolną platformę (5c). W tulei osadzono łożysko oraz koło zębate, które zazębia się z kołem napędowym zamontowanym na wale serwa umieszczonego na platformie górnej. Rozwiązanie to umożliwia płynny, sterowany obrót dolnej platformy względem górnej, a tym samym zmianę orientacji chwytaka bez ingerencji w układ ramion robota. Chwytak szczękowy przymocowany jest właśnie do platformy dolnej (5c).



Rys. 5. Schemat kinematyczny zaimplementowanego robota - powiększenie na platformę roboczą [Morecki i Knapczyk, 1993]

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Zaimplementowane stanowisko robotyczne [Morecki i Knapczyk, 1993]

Źródło: opracowanie własne.

Realizacja zadania odwrotnego w sterowaniu ruchem odbywa się następująco:

System wizyjny rozpoznaje kształt detalu i wyznacza jego współrzędne (x , y) na taśmie (z jest stałe). Po przeliczeniu do układu robota system sterowania dysponuje kompletnym wektorem docelowej pozycji TCP.

Trzykrotne zastosowanie wzoru (24), za każdym razem dla każdego ramienia, z wcześniejszym obrotem współrzędnych do lokalnego układu danego ramienia daje trójkę kątów φ_1 , φ_2 , φ_3 . Wartości te są bezpośrednio przekazywane do napędów jako rozkazy pozycji. Napędy realizują obrót, platforma ruchoma wędruje do wyznaczonego punktu, chwytak chwytaje detal, a następnie robot odwozi go do pojemnika przypisanego danemu kształtowi korzystając z dokładnie tego samego mechanizmu.

Cały cykl, od wykrycia elementu przez system wizyjny do wykonania wszystkich obliczeń zajmuje milisekundy. Ta szybkość wynika z gotowych wzorów, bez niepotrzebnie wykonywanych, czasochłonnych iteracji.

Zadanie proste kinematyki pełniło w stanowisku przede wszystkim rolę narzędzia diagnostycznego, szczególnie na etapie uruchamiania i kalibracji.

Procedura działała następująco: w wybranych punktach przestrzeni roboczej (o znanych współrzędnych w układzie stanowiska, wyznaczonych mechanicznie)

robot był ustawiany w zadaną konfigurację. Następnie odczytywano kąty enkoderów $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ i za pomocą wzorów (7-14) obliczano, gdzie w przestrzeni powinien znajdować się efektor. Wynik porównywano ze współrzędnymi punktu referencyjnego.

Podsumowanie

Niniejsza praca stanowi wprowadzenie do kinematyki robotów przemysłowych na przykładzie manipulatora typu delta. Przedstawiono w niej drogę od podstawowych zależności geometrycznych do kompletnego modelu matematycznego, który może zostać wykorzystany do implementacji algorytmów sterowania robotem.

Model matematyczny jest podstawą do precyzyjnego określania położenia efektora. Stanowi on łącznik między programistą a fizycznym urządzeniem.

W odróżnieniu od klasycznych robotów szeregowych, gdzie zadanie proste sprowadza się do składania przekształceń jednorodnych wzdłuż otwartego łańcucha, manipulator delta wymaga rozwiązywania geometrycznych równań więzów narzucanych przez każdą z trzech gałęzi kinematycznych jednocześnie. Prowadzi to do układów równań sfer i nieliniowych wyrażeń trygonometrycznych, jednak większa złożoność obliczeń jest uzasadniona możliwością uzyskania bardzo wysokiej dynamiki ruchu.

Zadanie odwrotne kinematyki i zadanie proste pełnią w rzeczywistym systemie komplementarne, ale odmienne role. Zadanie odwrotne jest rdzeniem pętli sterowania ruchem i jest obliczane setki razy na sekundę w odpowiedzi na polecenia systemu wizyjnego. Zadanie proste jest narzędziem diagnostycznym i kalibracyjnym – pozwala wykryć rozbieżność między tym, czego oczekuje sterowanie, a tym, co faktycznie dzieje się w mechanizmie. Oba zadania są niezbędne i żadne nie zastępuje drugiego.

Modele matematyczne często dostarczają wielu rozwiązań (np. dwóch pierwiastków równania kwadratowego), dlatego ważną kwestią jest odpowiednia interpretacja wyników i wybór rozwiązania odpowiadającego rzeczywistej konfiguracji fizycznej robota (np. odpowiednie wygięcie ramion lub poprawne ustalenie układu współrzędnych).

ORCID iD

Krzysztof Młynarczyk: <https://orcid.org/0009-0003-1557-6459>

Małgorzata Zdrodowska: <https://orcid.org/0000-0003-4383-5713>

Literatura

1. Ayazbay A.A., Balabyev G., Orazaliyeva S., Gromaszek K., Zhauyt A. (2024), *Trajectory Planning, Kinematics, and Experimental Validation of a 3D-Printed Delta Robot Manipulator*, International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research 13 (1).
2. Briot S. (2015), *Dynamics of Parallel Robots*, Springer.
3. Clavel R. (1990), *Device for the Movement and Positioning of an Element in Space*, US Patent US4976582.
4. Craig J. (1995), *Wprowadzenie do robotyki: mechanika i sterowanie*, WNT, Warszawa.
5. *International Federation of Robotics (2025)*, World Robotics – Industrial Robots 2025.
6. Lynch K.M., Park F.C. (2017), *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*, Cambridge University Press, Cambridge.
7. McKinsey & Company (2022), *The Future of Automation in Manufacturing*.
8. Merlet J.-P. (2006), *Parallel Robots*, Springer, Dordrecht.
9. Młynarczyk K. (2026), *Projekt stanowiska robotycznego w oparciu o robot typu delta*, praca inżynierska, Politechnika Białostocka, Białystok.
10. Morecki A., Knapczyk J. (1993), *Podstawy robotyki*, WNT, Warszawa.
11. Poppeová V., Uriček J., Bulej V., Šindler P. (2011), *Delta Robots – Robots for High Speed Manipulation*, Technical Gazette 18 (3), pp. 435-445.
12. Szkodny T. (2000), *Modelowanie i symulacja ruchu manipulatorów robotów przemysłowych*, Warszawa.

Kinematics of a Delta Robot – Mathematical Model and Implementation

Abstract

This paper presents the basic concepts of industrial robot kinematics using a parallel kinematic manipulator – a delta robot developed as part of an engineering thesis – as an example. Two fundamental problems are discussed: forward kinematics, which determines the position of the end effector based on known actuator rotation angles, and inverse kinematics, which determines the required actuator rotation angles for a given end-effector position. For both problems, an analytical mathematical model based on geometric relationships is presented, together with calculation examples. The developed model was implemented in a physical robotic workstation equipped with a vision system and a jaw gripper.

Key words

delta robot, robot kinematics, forward kinematics, inverse kinematics, parallel robot